Chapitre 25 : Couples de variables aléatoires
Feuille d'exercices

Exercice 1 Quatre cartes numerotées de 1 à 4 sont posées faces cachées sur une table. On retourne deux cartes simultanément au hasard, et on note X le plus petit numero tiré et Y le plus grand.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.
3. En déduire la loi de $X + Y$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, 3 \rrbracket)$ et soit $Y = (X-1)^2$.
Déterminez la loi conjointe de X et Y.

Exercice 3 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$.

1. Déterminez la loi du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.
2. Montrez que $E(XY) = E(X)E(Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 On dispose de 6 urnes, numérotées $U_1, U_2, \dots U_6$, telles que l'urne U_k contient k boules numerotées de 1 à k.

On lance un dé à 6 faces équilibré, et on note X le nombre obtenu. On choisit alors l'urne numerotée X et on extrait une boule de cette urne. On note Y le numero de cette boule.

1. Soit $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$?
2. Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y.
3. On veut généraliser la situation.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose cette fois qu'on a n urnes $U_1, \dots U_n$ toujours de sorte que l'urne U_k contient k boules numerotées de 1 à k, on lance un dé à n faces équilibrées et on conserve le même protocole que précédemment, en notant X la face du dé, et Y le numero de la boule extraite.
   a) Déterminer la loi du couple (X, Y)
   b) En déduire la loi de Y (qu'on laissera sous forme de somme)
   c) Calculer l'espérance de Y (qu'on ne laissera pas sous forme de somme....)

Exercice 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soient T une v.a. qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et Y une v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $P(Y = 1) = p$. On suppose que T et Y sont indépendantes et on pose $X = T - n$ et $Z = XY$.

1. Les v.a. X et T sont-elles indépendantes ? Et X et Y ?
2. Déterminez $Z(\Omega)$ et exprimez la loi de Z en fonction de celles de X et de Y.
3. En déduire que X et Z ont même loi.
4. X et Z sont-elles indépendantes ?
5. Calculez l'espérance de Z.

Exercice 6 Soient X e Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi géométrique de paramètre p (le même pour les deux).
Soit $M = max(X, Y)$ et $I = min(X, Y)$.
Déterminez les loi de M et de I.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$.
On pose

$$Y = 2n + 1 - X \text{ et } Z = \min(X, Y)$$

1. Montrez que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$,

$$[Z > k] = [k < X \leq 2n - k]$$

2. Déterminez la loi de Z.

Exercice 8 Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) telle que la loi conjointe est donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i \cap Y = j) = \frac{a}{2^{i+j} j!}$$

1. Déterminer la loi de X et celle de Y en fonction de a.
2. En déduire la valeur de a.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 Soit un jeu de $2n$ cartes ($n = 17$ ou 27) qui contient deux jokers. On joue au jeu suivant :
— On retourne les cartes une à une jusqu'à obtenir le premier joker
— Après le premier joker, à chaque fois que l'on retourne une carte, le joueur paie un euro.
— dès que le deuxième joker est retourné, le joueur gagne a euros et arrête de jouer.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes retournées pour obtenir le premier joker, et Y pour le deuxième.

1. Montrez que si $1 \leq i < j \leq 2n$, $P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{n(2n-1)}$.
2. Donner la loi du couple (X, Y), puis les lois de X, Y et $Y - X$.
3. Calculez $E(X)$.
4. Déterminer la valeur de a pour laquelle la partie est équilibrée.

Exercice 10 Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = a \frac{i + j}{i! j! 2^{i+j}}$$

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y - 1$ sachant $(X = k)$. Qu'obtient-on pour k = 0 ?
4. Soit $Z = 2^{X+Y}$. Calculer l'espérance de Z si elle existe.

Exercice 11 Le nombre N de clients venant déjeuner le midi au restaurant *Chez Christelle* est une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que le menu comporte deux formules A et B et que chaque client commande soit la formule A avec une probabilité $p \in]0, 1[$, soit la formule B avec probabilité $1 - p$. On suppose enfin que les clients choisissent indépendamment les uns des autres et on note X la variable aléatoire égale au nombre de formules A commandées et Y la variable aléatoire égale au nombre de formules B commandées.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité $\mathbf{P}_{[N=n]}(X = k)$.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de X.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 (Somme et différence de deux variables aléatoires (d'après EDHEC)) Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier naturel au moins égal à 2 . Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle, à chaque lancer, la probabilité de faire "face" est égale à $\frac{1}{2}$. Chacun des deux joueurs effectue n lancers indépendants de la pièce (les $2n$ lancers des joueurs sont donc supposés mutuellement indépendants) et on désigne par X, Y, Z et T les variables aléatoires suivantes : X représente le nombre de «face » obtenus par A, Y représente le nombre de « face » obtenus par $B, Z = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. a) Déterminer la loi des variables aléatoires X et Y.
   b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
2. a) Calculer la probabilité de l'évènement $[Z = 1]$.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement $[Z = n]$.
3. a) Exprimer l'évènement $[Z = n]$ à l'aide des évènements $[X = j]$ et $[Y = k]$, où k sera exprimé en fonction de j.
   b) En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ n-j \end{array} \right)$$

4. a) Exprimer l'évènement $[T = 0]$ à l'aide des évènements $[X = j]$ et $[Y = k]$, où k sera exprimé en fonction de j.
   b) Déduire alors du 3.b) la probabilité de l'évènement $[T = 0]$.
5. Z et T sont-elles indépendantes ? On pourra considérer les évènements $[Z = 1]$ et $[T = 0]$.

Exercice 13 On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose :

$$U = |X - Y| \quad \text{et} \quad V = \min(X, Y)$$

1. On suppose que X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre p.
   a) Déterminer la loi du couple (U, V).
   b) En déduire que U et V sont indépendantes.
2. On suppose maintenant que U et V sont indépendantes et que, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités $\mathbf{P}(X = n)$ et $\mathbf{P}(Y = n)$ sont non nulles. Prouver que la loi commune de X et de Y est une loi géométrique.

Exercice 14 (Il faut se méfier des apparences) On se propose de montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi, et si Z est une variable aléatoire, alors XZ et YZ ne suivent pas nécessairement la même loi.

On lance une fois une pièce qui donne Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le lancer donne Pile et qui vaut 0 si le lancer donne Face et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le lancer donne Face et qui vaut 0 si le lancer donne Pile. On pose $Z = Y$.

1. a) Montrer que la variable XZ est certaine.
   b) Qu'en est-il de la variable YZ ?
2. Conclure.

Exercice 15 1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.

a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b) En déduire la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$.

2. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.

a) Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_2).

b) En déduire la probabilité de l'événement $(Y_1 = Y_2)$.

Exercice 16 Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k_0 un élément de $[\![1, N-1]\!]$. On pose $p = \dfrac{k_0}{N}$ et $q = 1 - p$.

On considère la suite de variables aléatoires (X_n) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $[\![0, N]\!]$ dont les lois sont données par :

— X_0 est la variable certaine égale à k_0,

— X_1 suit la loi binomiale de paramètres N et p.

— Pour tout k de $[\![0, N]\!]$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1}, sachant que $(X_n = k)$ est réalisé, est la loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{k}{N}$.

On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = P(X_n = 0) + P(X_n = N)$ et $v_n = 1 - u_n$.

1. Montrer que :

$$\forall i \in [\![0, N]\!], P(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{N} P(X_n = k) \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}.$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = E(X_n)$.

3. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}(N - X_{n+1})) = \frac{N-1}{N} E(X_n(N - X_n)).$$

b) En déduire la valeur de $E(X_n(N - X_n))$ en fonction de N, n et k_0.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente.

5. a) Montrer que, si X est une variable aléatoire discrète à valeurs positives, alors on a :

$$\forall a \in]0, +\infty[, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

b) Étudier sur $[1, N-1]$, la fonction f définie par $f(x) = x(N - x)$.

c) En utilisant la question 3.b), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq pq \frac{N^2}{N-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

6. a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) En déduire que pour tout k de $[\![1, N-1]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

c) En utilisant la question 2, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = N) = p$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$.

Exercice 17 Un dispositif de comptage dénombre les visiteurs qui entrent dans un musée. On note $X_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire X_n qui donne le nombre de visiteurs ayant passé le portail entre les instants 0 et n. On se place dans le cas où les variables sont telles que pour tous entiers $0 \leq m \leq n$, X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes, et $X_n - X_m$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(n - m)$ (α est un réel strictement positif donné). Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leq m \leq n$.

1. a) Quelle est, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n ?
   b) Quelle est la loi du couple (X_m, X_n) ?
2. Pour $n \neq 0$, on pose $p = \dfrac{m}{n}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la loi de probabilité de X_m, sachant que $(X_n = k)$ est réalisé, puis identifier cette loi.
3. On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit entier $n > 0$ tel qu'il soit entré au moins un visiteur entre les instants 0 et n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(N = n)$ en fonction de X_{n-1} et X_n, puis déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

Exercice 18 (ESCP 2011) Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On tire un jeton au hasard, on note J son numéro et on le remet dans la boîte. On tire alors simultanément J jetons de la boîte que l'on distribue au hasard dans trois urnes $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ et U_3 (vides au départ). Pour tout $i \in [\![1; 3]\!]$, on note X_i le nombre de jetons dans l'urne U_i après cette opération.

1. Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire les espérances de X_1, X_2 et X_3.
2. a) Déterminer la loi du couple $(\mathrm{J}, \mathrm{X}_1)$.
   b) En déduire la loi du vecteur aléatoire (J, X_1, X_2).
   c) En déduire la loi du vecteur aléatoire (X_1, X_2, X_3).
3. On pose
$$\mathrm{Y}_1 = \frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{J}}, \quad \mathrm{Y}_2 = \frac{\mathrm{X}_2}{\mathrm{J}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}_3 = \frac{\mathrm{X}_3}{\mathrm{J}}.$$
   a) Calculer les espérances de Y_1, Y_2 et Y_3.
   b) On admet la «formule de l'espérance totale» suivante
$$E\left(Y_1^2\right) = \sum_{k=1}^{n} P(J = k) E\left(Y_1^2 \mid J = k\right),$$
   où $E\left(Y_1^2 \mid J = k\right)$ désigne l'espérance de Y_1^2 lorsque l'on munit l'univers de la probabilité conditionnelle sachant J = k.
   Calculer la variance de Y_1 en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 19 (Il faut se méfier des apparences 2) On se propose de montrer que, si X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires telles que X_1 et Y_1 suivent la même loi et X_2 et Y_2 suivent la même loi, alors $X_1 + X_2$ ne suit pas nécessairement la même loi que $Y_1 + Y_2$.

1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.
   Donner la loi de X_1 ainsi que celle de X_2.
2. On dispose d'une urne contenant n boules, toujours indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.
   a) Vérifier que Y_1 suit la même loi que X_1.
   b) En déduire, grâce à la formule des probabilités totales, la loi de Y_2 et vérifier que Y_2 suit la même loi que X_2.
3. Déterminer les supports de $X_1 + X_2$ et de $Y_1 + Y_2$ et conclure quant à l'objectif de l'exercice.

Exercice 20 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que X, Y et Z suivent toutes les trois la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire que l'on a, pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \dfrac{1}{n}$).

1. a) Montrer que : $\forall k \in [\![2, n+1]\!], P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

   b) Montrer que : $\forall k \in [\![n+2, 2n]\!], P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :

$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$

Exercice 21 On désigne par a et b deux réels éléments de $]0, 1[$.

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à lancer simultanément deux pièces, A et B, la pièce A donnant Pile avec la probabilité a, la pièce B donnant Pile avec la probabilité b. On suppose que ces expériences sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, les résultats des deux pièces sont indépendants.

On considère les variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comme suit : X est égale au nombre d'expériences qu'il faut effectuer avant que la pièce A donne Face pour la première fois et Y est égale au nombre d'expériences qu'il faut effectuer avant que la pièce B donne Face pour la première fois.

1. Déterminer les lois de X et Y ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner, pour tout entier naturel k, la valeur de la probabilité $P(X \geq k)$.
3. On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne Face pour la première fois. Pour cela, on considère la variable aléatoire $M = \min(X, Y)$.
   a) Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $P(M \geq k)$.
   b) En déduire la loi de probabilité de M.
4. Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas Face avant la pièce A, c'est-à-dire la probabilité $P(Y \geq X)$.

Exercice 22 Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B. On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0,1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0,05.
   a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
   b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?
2. Au fil des jours, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA...$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série BBAAAB...).

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geqslant 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

a) i. Justifier soigneusement que

$$\forall \mathrm{k} \geqslant 1, \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{L}_1 = \mathrm{k}\right) = (0,3)^{\mathrm{k}}(0,7) + (0,7)^{\mathrm{k}}(0,3)$$

et vérifier par le calcul que la somme des probabilités est bien égale à 1.

ii. Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

b) i. Déterminer la loi du couple aléatoire $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$.

ii. En déduire la loi de L_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À partir d'un jour donné, que l'on appellera jour 1, on note N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

c) Montrer que

$$\forall \mathrm{k} \geqslant 2, \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{T}_2 = \mathrm{k}\right) = (\mathrm{k}-1)(0,7)^2(0,3)^{k-2}$$

Exercice 23 Soit T une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. On considère $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2, \ldots,\ \mathrm{T}_\mathrm{n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de T.

La moyenne empirique de $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2, \ldots,\ \mathrm{T}_n$ est la variable aléatoire M définie par

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i.$$

La déviation empirique corrigée de $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2, \ldots,\ \mathrm{T}_\mathrm{n}$ est la variable aléatoire S' définie par

$$S' = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (T_k - M)^2}.$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de M.
2. Pour tout $k \in [1; n]$, démontrer que

$$V\left(T_k - M\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(S'^2\right) = \sigma^2.$$

Pour la variance, on admettra que

$$V\left(S'^2\right) = \frac{(n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^4}{n(n-1)},$$

où μ_4 est le moment centré d'ordre 4 de T, c'est-à-dire $\mu_4 = \mathrm{E}\left((T-\mu)^4\right)$.

3. Dans cette question, on suppose que T suit la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Donner les valeurs de $E(M)$ et $E\left(S'^2\right)$.

b) i. Justifier que $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ et $X(X-1)(X-2)(X-3)$ forment une base de $\mathbb{R}_4[X]$ puis écrire la décomposition du polynôme $(X-\lambda)^4$ dans cette base.

ii. Calculer les espérances

$$\mathrm{E}(T(T-1)), \quad \mathrm{E}(T(T-1)(T-2)) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(T(T-1)(T-2)(T-3))$$

et en déduire successivement que

$$E\left((T-\lambda)^4\right) = \lambda(3\lambda+1)$$

et

$$V\left(S'^2\right) = \lambda\frac{2\lambda n + n - 1}{n(n-1)}.$$

c) De M et S'^2, qui a la variance minimale ?